Résumé Géométrie Analytique dans L'éspace

Préparé par : Prof Rabie
2 BAC- PC/SVT

Remarque ①

$A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$

$\rightarrow \vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$\rightarrow AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}$

Remarque ②

$\vec{U}(x, y, z)$ et $\vec{V}(x', y', z')$

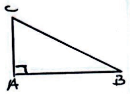
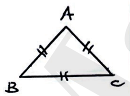
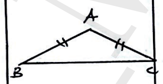
$\rightarrow \underbrace{\vec{U}\cdot\vec{V}}_{\text{produit scalaire}} = xx' + yy' + zz'$

$\rightarrow \vec{U}\cdot\vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \cos(\vec{U}, \vec{V})$

Remarque ③

* $\|\vec{AB}\| = AB$.
* $\vec{U}(x, y, z) \rightarrow \|\vec{U}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Remarque ④

	$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0$ ABC est rectangle en A
	$AB = AC = BC$ ABC est équilatéral
	$AB = AC$ ABC est isocèle en A

Remarque ⑤

Orthogonalité de deux vecteurs

* $\vec{U}(x, y, z)$ et $\vec{V}(x', y', z')$
* $\vec{U} \perp \vec{V} \Leftrightarrow \vec{U}\cdot\vec{V} = 0$
$\Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

Remarque ⑥

Droite

(D) $A(x_A, y_A, z_A)$ — $\vec{U}(\alpha, \beta, \gamma)$ vecteur directeur à (D)

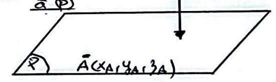
Représentation paramétrique de la droite (D)

$$D(A, \vec{U}) : \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

Remarque ⑦

Plan

vecteur normal à (P) $\vec{n}(a, b, c)$



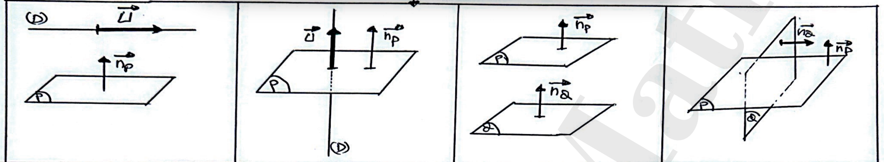
Équation cartésienne du plan (P)

$$\underbrace{a}x + \underbrace{b}y + \underbrace{c}z + \underbrace{d}_{A} = 0$$

$\vec{n}$ — A

Parallélisme - Orthogonalité

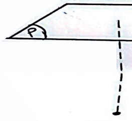
Remarque ⑧

			
(D) // (P) $\Leftrightarrow \vec{n_P} \perp \vec{U}$ $\Leftrightarrow \vec{n_P}\cdot\vec{U} = 0$	(D) ⊥ (P) $\Leftrightarrow \vec{n_P}$ et $\vec{U}$ sont colinéaires	(P) // (Q) $\Leftrightarrow \vec{n_P}$ et $\vec{n_Q}$ sont colinéaires $(k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \vec{n_P} = k\vec{n_Q}$	(P) ⊥ (Q) $\Leftrightarrow \vec{n_P} \perp \vec{n_Q}$ $\Leftrightarrow \vec{n_P}\cdot\vec{n_Q} = 0$

Remarque ⑨

Distance d'un point à un plan

(P) : $ax + by + cz + d = 0$



$$d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$A(x_A, y_A, z_A)$

Remarque ⑩

Distance d'un point à une droite

(D), A, $\vec{U}$, B

$$d(B, (D)) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{U}\|}{\|\vec{U}\|}$$

Remarque ⑪

Surface d'un triangle

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

Remarque ⑫

L'aire d'un parallélogramme

$$S_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

Remarque ⑬

A, B et C sont alignés
$\Updownarrow$
$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$

Remarque ⑭

$\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires
$\Updownarrow$
$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

Remarque ⑮

L'ensemble des points

* $R > 0 \rightarrow$ (S) est une sphère
* $R < 0 \rightarrow$ (S) est l'ensemble vide
* $R = 0 \rightarrow$ (S) est un point

rabie.isli@gmail.com www.profrabiemaths.com Prof_Rabie_Maths 06 61 10 15 16

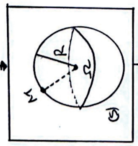
Résumé Géométrie Analytique dans L'éspace

Préparé par : Prof Rabie
2 BAC- PC/SVT

Équation Cartésienne De La Sphère (S)

2que (6)

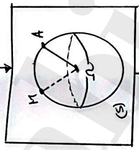
Ω et R



$M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

$(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

Ω et A

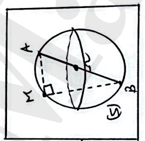


$M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=(\Omega A)^2$

$\Omega A=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}$

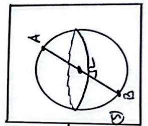
Diamètre [AB]

(M1)



$M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ $(\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM})$

(M2)



* Ω est le milieu du segment [AB]

$\rightarrow \Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

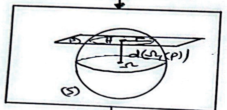
* $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}{2}$

$M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

Positions Relatives d'un Plan et d'une Sphère

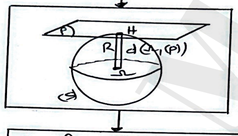
2que (17)

$d(\Omega,(P)) < R$



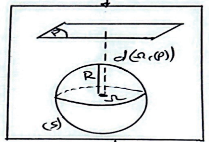
Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$

$d(\Omega,(P)) = R$



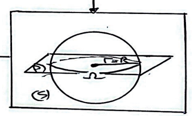
Le plan (P) est tangente à la sphère (S) au point H.

$d(\Omega,(P)) > R$



Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

$d(\Omega,(P)) = 0$



Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre Ω et de rayon $r=R$

2que (18)

Le produit vectoriel

* On a $A(2,1,4)$ et $B(1,2,2)$ et $C(2,3,1)$
* $\overrightarrow{AB}(-1,1,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(0,2,-3)$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{array}{c}+\\-\\+\end{array}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix}\begin{array}{c}\vec{i}\\\vec{j}\\\vec{k}\end{array} = +\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & -3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

Le produit vectoriel

$$=(-3+4)\vec{i}-(3-0)\vec{j}+(-2-0)\vec{k}$$
$$=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$$

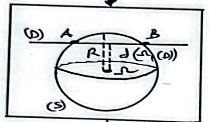
rabie.isli@gmail.com www.profrabiemaths.com Prof_Rabie_Maths 06 61 10 15 16

Préparé par : Prof Rabie
2 BAC- PC/SVT

Positions Relatives d'une Droite (D) et d'une Sphère (S)

Rque (19)

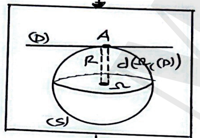
$d(\Omega,(D)) < R$



La droite (D) coupe la sphère (S) en deux points A et B.

t_1 , t_2

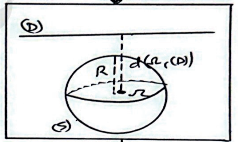
$d(\Omega,(D)) = R$



La droite (D) est tangente à la sphère (S) au point A

t_1

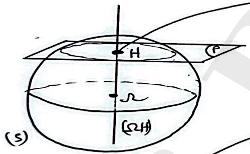
$d(\Omega,(D)) > R$

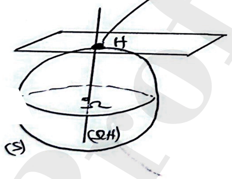


La droite (D) ne coupe pas la sphère (S)

$\emptyset$

Rque (20)



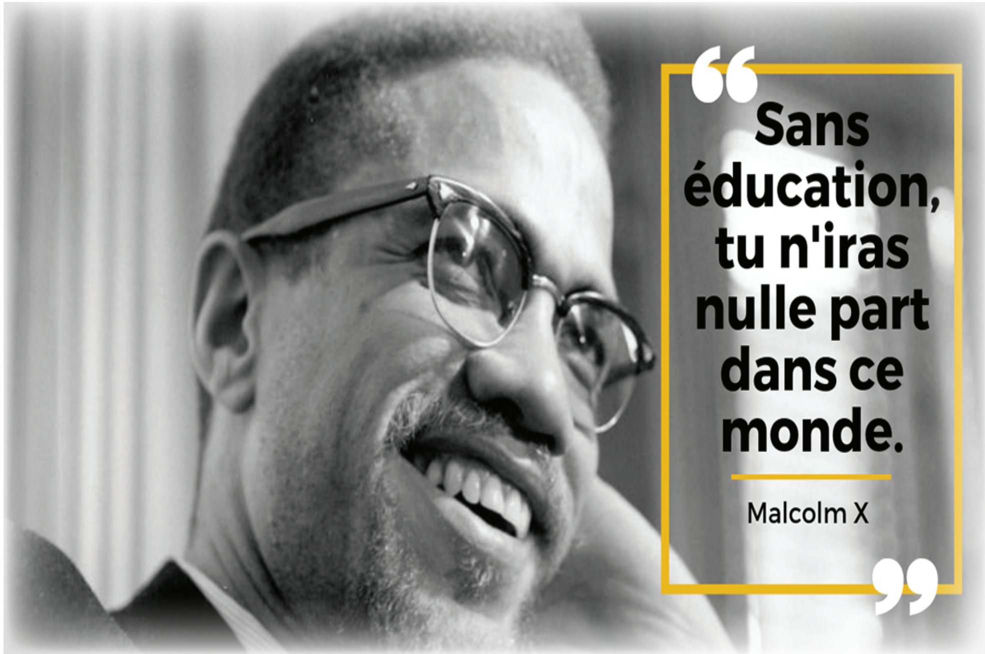


Pour déterminer les coordonnées du point H, on résoudre le système d'équation du plan (P) et la représentation paramétrique droite (ΩH), telle que (ΩH) est la droite passant par Ω et orthogonale au plan (P).

$$* \ (\Omega H) : \begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

$$* \ (P) : ax + by + cz + d = 0$$

$$H(x_H , y_H , z_H)$$



rabie.isli@gmail.com www.profrabiemaths.com Prof_Rabie_Maths 06 61 10 15 16